Wissen und Können	Aufgaben, Beispiele und Erläuterungen

1. Funktionen

Bezeichnungen:

D_{max} *max. Definitionsmenge (= Menge aller Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen)*

$x \mapsto f(x)$ *Funktionsvorschrift*

f(x) *Funktionsterm*

y = f(x) *Funktionsgleichung*

y *Funktionswert* von x

Der **Graph einer Funktion** kann mit Hilfe einer **Wertetabelle** gezeichnet werden!

W_f *Wertemenge* (= Menge aller Funktionswerte von f)

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung, die jedem x-Wert eindeutig einen y-Wert zuordnet.

$D_{max} = \mathbb{Q}$

> **Aufgabe 1**: Bestimme die Funktionswerte!
> a) f(x) = 2x -1 f(0); f(-3); f(20); f(0,1)
> b) $g(x) = -x^2+3$ g(1); g(-2); g(0); g(15)

$x \mapsto x^2 - 1$

$f(x) = x^2 - 1$

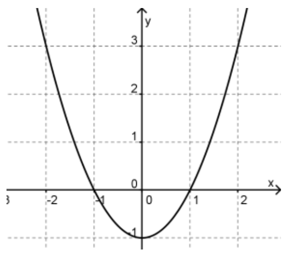
$y = x^2 - 1$

$x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 8$

Bsp.: $y = x^2 - 1$

Ergänze die Tabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



Hier ergibt sich als Graph eine Parabel.

$W_f = [-1;+\infty[$ (vgl. Graph)

Schnittpunkte mit den Achsen:

a) Schnittpunkt mit der y-Achse; Berechne dazu y = f(0)

b) Schnittpunkt mit der x-Achse (= **Nullstelle**), Löse dazu: f(x) = 0

$y = x^2 - 1$

a) $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow S_y(0|-1)$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow$ Zwei Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

→ Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-1|0)$ und $N_2(1|0)$

> **Aufgabe:**
> 1c) Bestimme die Schnittpunkte mit den Achsen für $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Schnittpunkte zweier Graphen G_f und G_g:

$\boxed{\text{Setze } f(x) = g(x)}$

> **Aufgabe:**
> 1d) Bestimme den Schnittpunkt der zwei Funktionen: y = 3x - 2 und y = –x + 2.

$f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = 2x - 1$

Ansatz: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$ $x \cdot (x - 2) = 0$

→ Es gibt zwei Schnittpunkte:

S_1: $x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow S_1(0|1)$ S_2: $x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 5 \Rightarrow S_2(2|5)$

---

2. Lineare Funktionen y = m·x + t

- Der Graph ist eine Gerade mit:
- **y-Achsenabschnitt t** (d.h. $(0|t) \in G_f$)
- **Steigung m**$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Höhenzuwachs}{waagrechterZuwachs}$

Wichtige Kompetenzen:

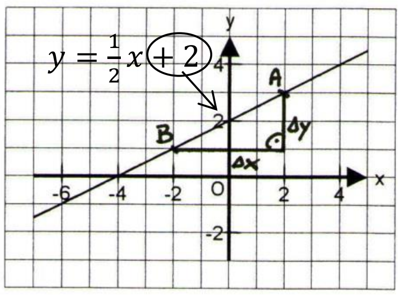
- ✓ Funktionsterm bestimmen
- ✓ Nullstelle berechnen (Setze f(x) = 0)
- ✓ x-Wert berechnen zu gegebenem y-Wert c (Löse mx + t = c nach x auf.)
- ✓ Graphen zeichnen

Funktionsterm einer Gerade bestimmen:

Erstelle die Gleichung der Geraden AB mit A(2|3) und B(−2|1):

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{1}{2}$, dann Punkt A oder B in y = m·x + t einsetzen. Hier wird B eingesetzt:

$1 = \frac{1}{2} \cdot (-2) + t$ → t = 2 → $y = \frac{1}{2}x + 2$



> **Aufgabe 2:**
> a) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte C(3|-1) und D(-2|2).
> b) Zeichne die Graphen der Funktionen mit $y = -\frac{2}{3}x + 2$ und $y = 1{,}5x$ mit Hilfe von m und t.

---

3. Lineare Ungleichungen

werden wie Gleichungen gelöst (Äquivalenzumformungen!)

Achtung: Bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl muss das **Kleiner-/Größer-Zeichen umgedreht** werden!

Musterbeispiel:

$(4 - x) \cdot 5 < -25$

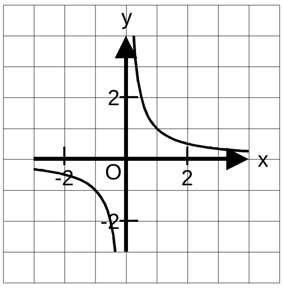
$20 - 5x < -25 \quad |-20$

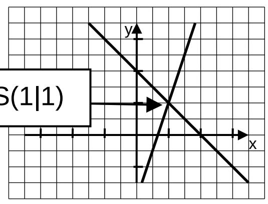
$-5x < -45 \quad |:(-5)$ (⇒ Zeichen umdrehen!)

$x > 9$

→ Lösungsmenge $L = \{x | x > 9\} =$ (Mengenschreibweise)

$=]9\,;\,\infty[$ (Intervallschreibweise)

4. Direkte Proportionalität - Lineare Funktionen der Form y = mx heißen proportionale Funktionen. - Die Quotienten $\frac{y}{x}$ sind dabei immer gleich; dieser Wert heißt Proportionalitätsfaktor und gibt die Steigung m an: $m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	✓ Zum n-Fachen der einen Größe gehört stets das n-Fache der anderen Größe. ✓ Der Graph ist eine Gerade. Bsp.: Benzinmenge V (in l) $\mapsto$ Preis P (in €) 15l $\mapsto$ 24,60 € 45l $\mapsto$ 73,80 €
5. Gebrochen-rationale Funktionen (Bruchfunktionen → x im Nenner) $f(x) = \frac{\pm 1}{x-a} + b$ - Achtung: Definitionsmenge D! **N**enner **N**ie **N**ull: D = $\mathbb{Q}$ \ {a} **- Senkrechte Asymptote** bei x = a (= Polstelle bei der Definitionslücke) **- Waagrechte Asymptote** bei y = b - Die Graphen heißen **Hyperbeln**. Den Graphen einer Bruchfunktion erhält man, indem man den Graphen von y = $\frac{1}{x}$ verschiebt und ggf. an der x-Achse spiegelt.	$f(x) = \frac{1}{x}$ Dmax = $\mathbb{Q}$ \ {0}  **Aufgabe 3)** Gesucht: Graph von $y = \frac{1}{x+1} - 2$ $g(x) = \frac{-1}{x-2} + 3$ mit $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$
6. Indirekte Proportionalität - Funktionen der Form y = $\frac{a}{x}$ heißen indirekt proportionale Funktionen. - Die Produkte aller Wertepaare $\left(x \middle\| \frac{a}{x}\right)$ sind gleich	✓ Zum n-Fachen der einen Größe gehört stets das $\frac{1}{n}$ -Fache der anderen Größe. ✓ Der Graph ist eine Hyperbel. Bsp.: Badewanne mit 200l füllen; x ist der Zufluss in Litern pro sec, y gibt die Fülldauer in sec an. → $f(x) = \frac{200}{x}$ stellt die gebr.-rat. Funktion dar.
7. Bruchterme und Bruchgleichungen Vereinfachen und Zusammenfassen von Bruchtermen: ✓ Kürzen und Erweitern ✓ Addieren und Subtrahieren (nur bei gleichen Nennern möglich! → ggf. auf gleiche Nenner bringen) ✓ Multiplizieren und Dividieren **Beachte:** Gib als Erstes die Definitionsmenge an!	1) $\frac{x^2-x}{1-x} =$ $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$; D bleibt bei allen Umformungen unverändert: $= \frac{-x(-x+1)}{1-x} = \frac{-x(1-x)}{1-x} = -x$ 2) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x} =$ $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{-1;0\}$ $= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$ **Aufgabe 4:** Vereinfache! a) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2-x}$ b) $\frac{x}{2} - \frac{0{,}5x^2}{x+1}$
Lösen von Bruchgleichungen: **Aufgabe 4c)** Bestimme die Definitions- und Lösungsmenge: $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{1}{x^2-x}$	$\frac{1}{x-7} = \frac{14}{(x-7)\cdot(x+7)}$ | · (x-7)·(x+7) ; $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{-7;+7\}$ „Mit dem Hauptnenner multiplizieren"!!! (x+7) = 14 ⇔ x = 7 ∉ D_{max} ⇒ L = { }, es gibt keine Lösung
8. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten Für $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und n∈ $\mathbb{Z}$ gilt: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ***Rechengesetze für Potenzen*** ($a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und m, n∈ $\mathbb{Z}$): Potenzen mit gleicher Basis: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$7^0 = 1$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$; $(-x)^0 = 1$; $\frac{1}{z^{-3}} = z^{-(-3)} = z^3$ $6^{-3} \cdot 6^7 = 6^{-3+7} = 6^4$ $(-s)^{-2} \cdot (-s)^{-5} = (-s)^{-2+(-5)} = (-s)^{-7}$ $(-5)^3 : (-5)^{-2} = (-5)^{3-(-2)} = (-5)^5$ $\frac{b^2}{b^3} = b^{2-3} = b^{-1}$ $(k^3)^{-2} = k^{3\cdot(-2)} = k^{-6}$ $(2^{-4})^{-3} = 2^{-4\cdot(-3)} = 2^{12}$

Potenzen mit gleichem Exponenten: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n : b^n = (a:b)^n$ bzw. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$5^7 \cdot 6^7 = (5 \cdot 6)^7 = 30^7$ $\quad$ $(-a)^{-5} \cdot b^{-5} = (-a \cdot b)^{-5}$ $8^9 : 4^9 = (8:4)^9 = 2^9$ $\quad$ $\frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$ $(-3)^4 = 3^4$ und $(-3)^{-4} = 3^{-4}$; $\quad$ $(-3)^5 = -3^5$ und $(-3)^{-5} = -3^{-5}$ $-3^4 = -1 \cdot 3^4 = -(3^4) = -81 \neq (-3)^4 = +81$
9. Laplace-Experimente - **Ergebnis** ω (= Versuchsausgang) - Alle Ergebnisse fasst man im **Ergebnisraum Ω** zusammen. - Teilmengen des Ergebnisraumes **Ω** sind **Ereignisse**. - Das Gegenereignis $\overline{A}$ zu A enthält alle Ergebnisse aus **Ω**, die nicht zu A gehören. - Empirisches Gesetz der großen Zahlen: Die relative Häufigkeit eines Ereignisses stabilisiert sich mit zunehmender Versuchszahl um einen festen Wert. - Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**. Man kann die **Wahrscheinlichkeit P(E)** für ein Ereignis E so berechnen: $P(E) = \frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl der } \textit{möglichen} \text{ Ergebnisse}} = \frac{\lvert E \rvert}{\lvert \Omega \rvert}$	In einer Urne befinden sich fünf Lose mit den Zahlen 1 bis 5. Beim Ziehen eines Loses sind die möglichen Ergebnisse 1, 2, 3, 4, oder 5. Diese bilden den Ergebnisraum. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ein Ereignis wäre z.B. E = {„Die Losnummer ist gerade“} = {2; 4}. Es ist $E \subset \Omega$. Die Ergebnisse {1}, {2}, {3}, {4}, {5} haben alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Dieses Zufallsexperiment ist also ein Laplace-Experiment. Deshalb gilt für die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu ziehen: $P(E) = \frac{2}{5} = 40\%$
10. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen - Ein Zahlenpaar $(x\|y)$ heißt Lösung, wenn das Paar beide (!) Gleichungen erfüllt. a) Grafisches Lösen: → Zeichne beide Geraden; gemeinsame Punkte sind Lösungen b) Rechnerisches Lösen ✓ ***Einsetzungsverfahren:*** Löse eine Gleichung nach einer Variable auf und setze den ermittelten Term in die andere Gleichung ein. ✓ Alternativ: z.B. Gleichsetzverfahren Beachte: Das lineare Gleichungssystem hat 1. **genau eine** Lösung, wenn sich die Geraden in einem Punkt schneiden 2. **keine Lösung, wenn die Geraden parallel, aber nicht identisch sind.** 3. **unendlich viele** Lösungen, wenn die Geraden identisch sind.	Grafische Lösung: (I) y = 3x – 2 (II) y = −x +2 Schnittpunkt S(1|1)  L = {(1|1)} **Einsetzungsverfahren**: (I) x - 2y = 1 (II) x + 2y = 5 (II) nach x aufgelöst, ergibt: (II’) x = 5 − 2y in (I) (5 − 2y) − 2y = 1 ⇔ y = 1 in (II’) x = 5 − 2·1 =1 ⇔ x = 3 ⇒ L = {(3|1)} **Aufgabe 5)** Löse das Gleichungssystem (I) x + 2y = 7 (II) 3y − x = 8 mit dem Einsetzungsverfahren.

11. Geometrie

Kreise:

- Kreiszahl $\pi \approx 3{,}14$
- Umfang eines Kreises $U = 2\pi r = \pi \cdot d$
- Flächeninhalt eines Kreises $A = \pi r^2$

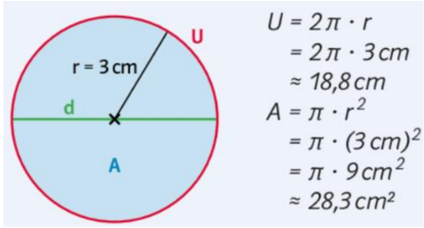
Gerades Prisma:

- Oberflächeninhalt $O = 2 \cdot G + M$
- Volumen $V = G \cdot h$

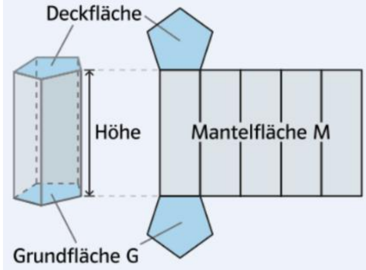
Gerader Zylinder:

- Mantelflächeninhalt $M = 2\pi r \cdot h$
- Oberflächeninhalt $O = 2 \cdot G + M =$
  $= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

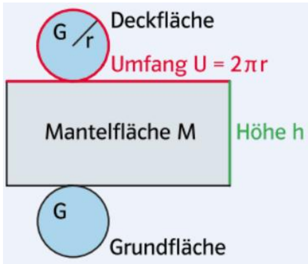
Kreise:

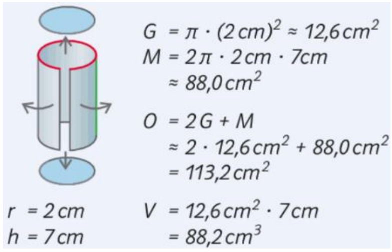


Gerades Prisma:



Gerader Zylinder:





Quelle der Grafiken: Lambacher Schweizer 8. Klett 2020.

LÖSUNGEN:

1a) f(0) = −1; f(-3) = −7; f(20) = 39; f(0,1) = −8,8

1b) g(1) = 2 ; g(-2) = −1 ; g(0) = 3; g(15) = −222

1c) $S_y(0|1)$; N(1,5|0)

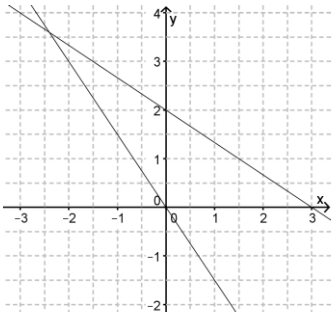
1d) S(1|1)

2a) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-1)}{-2-3} = \frac{-3}{5}$

Setze z.B. C ein: $-1 = \frac{-3}{5} \cdot 3 + t$ → t = 0,8

→ y = $\frac{-3}{5}$ x + 0,8

2b)

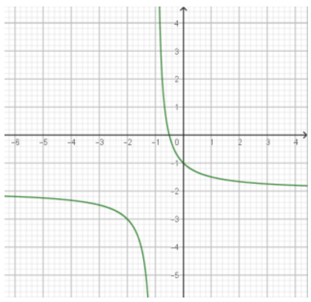


3) $y = \frac{1}{x+1} - 2$

Der Graph von $y = \frac{1}{x}$ wurde

- um 1 Einheit in negative x-Richtung (nach links) und
- um 2 Einheiten in negative y-Richtung (nach unten)

verschoben.



4a) $\frac{2}{x-2}$ b) $\frac{x}{2(x+1)}$

4c) D = ℚ \ {0;1}; Hauptnenner: x² −x = x·(x−1)
Multiplikation mit HN ergibt: x²=1 ⇒ L = {-1}

5) y = 3; x = 1 → L = {(1|3)}